

Institut für Angewandte Analysis und Stochastik

im Forschungsverbund Berlin e.V.

Zur mathematischen Modellierung eines Halbleiterinjektionslasers mit Hilfe der Maxwellschen Gleichungen bei gegebener Stromverteilung

J. Förste

submitted: 5. Oktober 1993

Institut für Angewandte Analysis
und Stochastik
Mohrenstraße 39
D – 10117 Berlin
e-mail: foerste@iaas-berlin.d400.de

Preprint No. 63
Berlin 1993

Herausgegeben vom
Institut für Angewandte Analysis und Stochastik
Mohrenstraße 39
D – 10117 Berlin

Fax: + 49 30 2004975
e-mail (X.400): c=de;a=d400;p=iaas-berlin;s=preprint
e-mail (Internet): preprint@iaas-berlin.d400.de

INHALTSVERZEICHNIS

1. Einleitung, Fragestellung	1
2. Lösungsbegriff, Näherungslösung	4
3. Einzigkeitssatz	13
Literatur	14

ZUSAMMENFASSUNG.

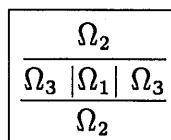
Zusammenfassung. Zur mathematischen Beschreibung eines Halbleiterinjektionslasers wird ein System partieller Differentialgleichungen vorgeschlagen, das aus den Maxwell'schen Gleichungen und der Ladungsträgerbilanz in der aktiven Zone besteht. Es zeigt sich, daß man für dieses System ein vernünftig gestelltes Rand-Anfangswertproblem formulieren kann.

Summary. A semiconductor injection laser is described by basic equations which consist of the Maxwell equations and charge carrier conservation law in the active zone. It is shown that the corresponding initial boundary value problem for this system is well posed.

Резюме. Для математического описания полупроводникового инжекционного Лазера используется система уравнений с частичными производными которая состоит из уравнений Максвелла и балансы зарядов в активной зоне. Показывается что начально-краевая задача для этой системы корректна.

1. EINLEITUNG, FRAGESTELLUNG

Wir betrachten ein beschränktes einfach zusammenhängendes räumliches Gebiet Ω , in dem sich ein halbleitendes Material befindet. Ω habe den Rand S und werde aufgefaßt als Vereinigung von Teilgebieten $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ (siehe Skizze).



Der Rand von Ω_1 werde mit $\Gamma_1 = \Gamma_{12} \cup \Gamma_{13}$ bezeichnet, wobei Γ_{12} zum Rand von Ω_2 und Γ_{13} zum Rand von Ω_3 gehört. Einzelne Punkte sollen uns dabei nicht interessieren, weil wir Integralbeziehungen benutzen und Beziehungen nur fast überall erfüllt zu sein brauchen. Γ_2 bezeichne den Rand von Ω_3 , soweit Ω_3 an Ω_2 stößt. Es wird ein skalares Feld N und zwei Vektorfelder E und H gesucht; N sei auf Ω_1 definiert, E und H auf Ω . Es sollen die Grundgleichungen

$$\frac{\partial N}{\partial t} = |J| - \frac{1}{\tau} N + D \Delta N - g(N)|E|, \quad (1)$$

$$\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} - \text{rot } H + (\sigma - g(N))E = J, \quad (2)$$

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} + \text{rot } E = 0, \quad \text{div } \mu H = 0 \quad (3)$$

gelten. $g(N), J, \tau, D, \varepsilon, \sigma$ und μ seien als Funktionen bzw. Konstanten gegeben. g sei nicht negativ, monoton wachsend und beschränkt, es existiere ein $N_1 > 0$, so daß $g(N)$ für $N < N_1$ verschwindet. g sei lipschitzstetig. ε und σ können ortsabhängig sein, insbesondere dürfen sie in $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ verschiedene positive Werte haben. Interessant wäre auch der Fall, daß ε in Ω_1 von N abhängt; dieser Fall soll aber hier nicht betrachtet werden. Die obere Grenze g_0 von $g(N)$ soll größer als σ sein. Da in unmagnetischen Halbleitern μ gewöhnlich sehr wenig von der Permeabilität 1 des Vakuums verschieden ist (vgl. [1], Seite 539), soll durchweg $\mu = 1$ gesetzt werden. Im übrigen hängen die eingehenden Konstanten (auch τ und D) von der atomaren Struktur des Halbleitermaterials ab; darauf gehen wir nicht ein und verweisen auf die einschlägige physikalische Literatur. Die Stromdichte J hängt letzten Endes von der elektrischen Potentialverteilung ab; dazu benötigt man weitere Gleichungen, die hier nicht betrachtet werden sollen. Wir stellen uns auf den Standpunkt, J sei bekannt oder über J lassen sich plausible Annahmen machen (vgl. [5], [6]). Ω_2 und Ω_3 seien ladungsfrei, dort gelte also

$$\text{div } \varepsilon E = 0. \quad (4)$$

Zur Zeit $t = 0$ sollen N, E und H bekannte Anfangswertverteilungen N_0, E_0 und H_0 haben. Auf dem gesamten Rand Γ_1 von Ω_1 sei die Randbedingung

$$\frac{\partial N}{\partial n} = 0 \quad (5)$$

zu erfüllen, dabei soll die Normale n längs Γ_1 in das äußere von Ω_1 zeigen. Da die Stoffkonstanten, insbesondere ε und σ in Ω_2 und Ω_3 unterschiedliche Werte haben, sind E und H auf den Rändern der Teilgebiete den für die Maxwellschen Gleichungen üblichen Übergangsbedingungen zu unterwerfen

$$E_\tau^{(1)}|_{\Gamma_{12}} = E_\tau^{(2)}|_{\Gamma_{12}}, H_n^{(1)}|_{\Gamma_{12}} = H_n^{(2)}|_{\Gamma_{12}}, H_\tau^{(1)}|_{\Gamma_{12}} = H_\tau^{(2)}|_{\Gamma_{12}}; \quad (6)$$

$$E_\tau^{(1)}|_{\Gamma_{13}} = E_\tau^{(3)}|_{\Gamma_{13}}, H_n^{(1)}|_{\Gamma_{13}} = H_n^{(3)}|_{\Gamma_{13}}, H_\tau^{(1)}|_{\Gamma_{13}} = H_\tau^{(3)}|_{\Gamma_{13}}; \quad (7)$$

$$E_\tau^{(3)}|_{\Gamma_2} = E_\tau^{(2)}|_{\Gamma_2}, H_n^{(3)}|_{\Gamma_2} = H_n^{(2)}|_{\Gamma_2}, H_\tau^{(3)}|_{\Gamma_2} = H_\tau^{(2)}|_{\Gamma_2}. \quad (8)$$

Dabei bezeichnet der obere Index (i) an der Feldgröße das Gebiet Ω_i , aus dem man sich dem betreffenden Randstück nähert; n und τ bezeichnen die Normal- und Tangentialkomponente des betreffenden Feldes. Auf dem Rande S von Ω sind E und H an das elektrische und magnetische Feld außerhalb von Ω anzuschließen. Dabei ist davon auszugehen, daß Teile von S (Kontakte) aus ideal leitendem Material bestehen, andere Teile von S relativ starke Felder (einfallendes und ausgestrahltes Licht) tragen und auf den Rest von S ein möglicherweise vernachlässigbares Hintergrundfeld trifft.

Die in einer äußeren Umgebung von Ω definierten Vektorfelder \tilde{E} und \tilde{H} und der Rand S von Ω seien so beschaffen, daß sich \tilde{E} und \tilde{H} auf einen Randstreifen $\Omega_\delta \subset \Omega$ der Dicke $\delta > 0$ so fortsetzen lassen, daß dort (3) und (4) gelten, die Beziehungen

$$E_\tau|_S = \tilde{E}_\tau|_S, \quad H_n|_S = \tilde{H}_n|_S, \quad H_\tau|_S = \tilde{H}_\tau|_S \quad (9)$$

bestehen, auf dem Restgebiet $\Omega - \Omega_\delta$ die fortgesetzten Felder \tilde{E} und \tilde{H} verschwinden und $\tilde{E}, \tilde{H} \in W_2^{1,1}(Q_T)$ sind. Auf Grenzen zwischen den Ω_i , die in Ω_δ liegen, seien die in der Form (9) geschriebenen Beziehungen (8) erfüllt. Sind nun E und H die als Lösungen von (1) – (3) gesuchten Felder, die außerhalb von Ω in \tilde{E} und \tilde{H} übergeben, dann setzen wir

$$E = \tilde{\tilde{E}} + \tilde{E}, \quad H = \tilde{\tilde{H}} + \tilde{H} \quad (10)$$

und schreiben (2) und (3) in der Form

$$\varepsilon \frac{\partial \tilde{\tilde{E}}}{\partial t} - \text{rot } \tilde{\tilde{H}} + (\sigma - g(N))\tilde{\tilde{E}} = J - \varepsilon \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} + \text{rot } \tilde{H} - (\sigma - g(N))\tilde{E}, \quad (11)$$

$$\mu \frac{\partial \tilde{\tilde{H}}}{\partial t} + \text{rot } \tilde{\tilde{E}} = -\mu \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} - \text{rot } \tilde{E}, \quad \text{div } \mu \tilde{\tilde{H}} = 0. \quad (12)$$

Aus (1) wird dann

$$\frac{\partial N}{\partial t} = |J| - \frac{1}{\tau} N + D \Delta N - g(N) |\tilde{\tilde{E}}|. \quad (13)$$

Die für $\tilde{\tilde{E}}$ und $\tilde{\tilde{H}}$ anstelle von E und H geschriebenen Beziehungen (6), (7), (8) bezeichnen wir mit (14), (15), (16) und an die Stelle von (4) kommt

$$\operatorname{div} \epsilon \tilde{\tilde{E}} = 0. \quad (17)$$

Physikalisch geht es bei der aufgeworfenen mathematischen Fragestellung um folgendes. Wenn elektromagnetische Wellen, z.B. Licht, auf einen materiellen Körper treffen, werden sie erfahrungsgemäß teilweise oder vollständig absorbiert und teilweise hindurchgelassen. Dies trifft allgemein für alle Körper auch für Halbleiter zu. Unter speziellen Voraussetzungen (Laser) wird Licht beim Durchgang durch Materie verstärkt. Derartige Voraussetzungen lassen sich u.a. auch bei Halbleitern realisieren. In der Bändertheorie der Halbleiterkristalle wird gezeigt, daß eine Verstärkung des Lichts (für einen bestimmten Wellenlängenbereich) daran geknüpft ist, daß eine sogenannte Besetzungsinversion vorliegt, daß es sich um ein aktives Medium handelt. Notwendig dazu ist, daß für jedes Paar von Zuständen E_λ (aus dem Valenzband) und $E_{\lambda'}$ (aus dem Leitungsband)

$$F_n - F_p > E_{\lambda'} - E_\lambda = h\nu$$

gilt, wobei F_n und F_p die Quasi-Fermi-Niveaus von Elektronen und Löchern bezeichnen, ν die Frequenz des einfallenden Lichts und h die Plancksche Konstante ist. Dieser Fall kann nur eintreten, wenn

$$F_n - F_p > E_g$$

mit E_g als Breite der verbotenen Zone ist; man sagt Elektronen- und Löcher-gas müssen entartet sein. Eine derartige Entartung kann in einem Teilgebiet des Halbleitermaterials erreicht werden, wenn man durch einen elektrischen Strom Ladungsträger (z.B. Elektronen) zuführt und so eine höhere Ladungsträgerkonzentration als in der Umgebung herstellt. Dabei entsteht das Problem, der natürlichen Tendenz der Konzentration sich u.a. infolge von Diffusion auszugleichen, entgegenzuwirken. Um dies zu erreichen, kann man einerseits für ständigen Nachschub sorgen und andererseits versuchen, den Abfluß zu verhindern. Dem ständigen starken Zustrom von Ladungsträgern sind insofern Grenzen gesetzt als ein elektrischer Strom durch die Joulesche Wärme zur Temperaturerhöhung beiträgt: dies ist aus Gründen, die nicht weiter erörtert werden sollen, unerwünscht. Die Verhinderung des Abflusses sucht man zu erreichen, indem man das Gebiet mit Besetzungsinversion in eine Umgebung einbettet, die für die Ladungsträger weniger aufnahmefähig ist. Man spricht in diesem Fall von einer Heterostruktur des Halbleiters, z.B. wird GaAs eingebettet in eine Umgebung von GaAlAs. Mit dem Gebrauch von Heterostrukturen wird noch ein weiteres Ziel verfolgt. Man möchte erreichen, daß die elektromagnetische Energie möglichst konzentriert in das Gebiet der Besetzungsinversion gelangt und danach verstärkt den Halbleiter wieder verläßt. Dazu ist eine ortsabhängige Verteilung des Brechungsindex und damit der Dielektrizitätskonstanten ϵ geeignet. In engem Zusammenhang mit der materiellen Struktur des Gebietes Ω stehen die Grundgleichungen. (2) und (3) sind die Maxwell'schen Gleichungen der Elektrodynamik. Aus der elektromagnetischen Theorie des Lichtes weiß man, daß in (2) der Summand σE im Falle $\sigma > 0$ für die Absorption verantwortlich

ist. Soll diese aufgehoben oder in Verstärkung verwandelt werden, so muß die elektrische Feldstärke E mit einem nichtpositiven bzw. negativen Faktor multipliziert werden. Dazu wird die als gain bezeichnete Funktion $g(N)$ eingeführt, die oberhalb eines Schwellwertes $N = N_1$ der Ladungsträgerkonzentration die durch σ beschriebenen Verluste kompensiert und bei weiterem Anwachsen von N in Verstärkung verwandelt. Durch die Beschränktheitsforderung an $g(N)$ wird ausgedrückt, daß die Intensität des Lichtes bei Erhöhung der Ladungsträgerkonzentration nicht unbegrenzt wächst. In der Bilanzgleichung (1) für die Ladungsträgerkonzentration N beschreibt $|J|$ die Quellen, $-\frac{1}{\tau}N$ die spontane Emission von Licht, $D\Delta N$ die Ladungsträgerdiffusion und $-g(N)|E|$ die stimulierte Lichtemission. Die Randbedingung $\frac{\partial N}{\partial n} = 0$ verhindert den Abfluß der Ladungsträger.

Wenn es uns gelingt nachzuweisen, daß das Rand-Anfangswertproblem (11) – (17) für N, \tilde{E}, \tilde{H} mit $\tilde{E}_0 = E_0 - \tilde{E}_0, \tilde{H}_0 = H_0 - \tilde{H}$ vernünftig gestellt ist, d.h. unter geeigneten analytischen Voraussetzungen eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt, so setzen wir uns damit in die Lage, unter Verwendung von (10) N, E und H und daraus abgeleitete Größen wie z.B. die Joulesche Wärme im Innern des Halbleiter-Lasers zu bestimmen. Der Fortschritt gegenüber bisherigen mathematischen Modellierungen derartiger Laser dürfte darin bestehen, daß man an die Stoffgrößen keine Bedingungen stellen muß, die den Übergang von den Maxwell'schen Gleichungen zur Wellengleichung rechtfertigen und erst recht nicht solche, die deren Separation in einen transversalen und einen longitudinalen Anteil gestatten. Neuere Entwicklungen in der Halbleiterlasertechnik, insbesondere in bezug auf die räumlichen Abmessungen lassen dies wünschenswert erscheinen (vgl. [2]). Schließlich ist das Modell ausbaufähig: Ω kann auch in mehr als drei Teilbereiche zerlegt werden und man kann Einflüsse berücksichtigen, denen die Koeffizienten im einzelnen unterliegen. Man kann versuchen (1) – (3) mit den Grundgleichungen des Ladungsträgertransports zu verknüpfen: dann wäre die Stromdichte J keine gegebene Größe mehr.

2. LÖSUNGSBEGRIFF, NÄHERUNGSLÖSUNG

Unter einer Lösung des Rand-Anfangswertproblems (11) – (17) verstehen wir ein skalares Feld N und zwei Vektorfelder \tilde{E}, \tilde{H} , falls $N \in W_2^{1,1}(Q_T^{(1)})$, $Q_T^{(1)} = \Omega_1 \times [0, T]$; $\tilde{E}, \tilde{H} \in W_2^{0,1}(Q_T)$, $Q_T = \Omega \times [0, T]$ den Integralrelationen

$$\int_0^T \int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial N}{\partial t} \Phi + D \operatorname{grad} N \operatorname{grad} \Phi + \frac{1}{\tau} N \Phi + g(N) |\tilde{E}| \Phi - |J| \Phi \right) dx dt = 0, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \left(\varepsilon \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} \Psi_1 - \tilde{H} \operatorname{rot} \Psi_1 + (\sigma - g(N)) \tilde{E} \Psi_1 - \right. \\ \left. J \Psi_1 + (W + (\sigma - g(N)) \tilde{E}) \Psi_1 \right) dx dt = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left(\mu \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial t} \Psi_2 + \widetilde{E} \operatorname{rot} \Psi_2 + V \Psi_2 \right) dx dt = 0 \quad (20)$$

mit $W = \varepsilon \frac{\partial \widetilde{E}}{\partial t} - \operatorname{rot} \widetilde{H}$, $V = \mu \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \widetilde{E}$ für alle $\Phi \in W_2^{1,0}(Q_T^{(1)})$, $\Psi_1 \in M_r(Q_T)$, $\Psi_2 \in M_n(Q_T)$ genügen. Dabei sind $M_r(Q_T)$ und $M_n(Q_T)$ Unterräume von $L^2(Q_T)$, die den Übergangsbedingungen an den Zwischenrändern Rechnung tragen. Um klar zu machen wie $M_r(Q_T)$ und $M_n(Q_T)$ aussehen, gehen wir von den bekannten Zerlegungen

$$L^2(\Omega) = \overset{\circ}{I}(\Omega) \oplus G(\Omega), \quad L^2(\Omega) = I(\Omega) \oplus \overset{\circ}{G}(\Omega)$$

aus. Dabei ist $G(\Omega)$ der Unterraum aller $u = \operatorname{grad} \varphi$, $\varphi \in W_2^1(\Omega)$ und $\overset{\circ}{I}(\Omega)$ die Abschließung der Menge $\overset{\circ}{I}(\Omega)$ aller beliebig oft differenzierbaren quellenfreien Felder mit kompaktem Träger; $\overset{\circ}{G}(\Omega)$ besteht aus allen $u = \operatorname{grad} \varphi$, $\varphi \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ und in $I(\Omega)$ bilden die stetig differenzierbaren quellenfreien Felder mit auf dem Rand verschwindender Tangentialkomponente eine dichte Menge. Es seien Ω^* ein beschränktes Gebiet, Ω_1^* und Ω_2^* Teilgebiete von Ω^* und Γ^* der gemeinsame Rand von Ω_1^* und Ω_2^* , d.h. $\Omega^* = \Omega_1^* \cup \Gamma^* \cup \Omega_2^*$. Es gelte $\operatorname{div} \mu_i^* \Psi_i^* = 0$ in Ω_i^* , $\Psi_i^* \in W_2^1(\Omega_i^*)$, $i = 1, 2$ und

$$\Psi_{1\tau}^*|_{\Gamma^*} = \Psi_{2\tau}^*|_{\Gamma^*}, \quad \mu_1^* \Psi_{1n}^*|_{\Gamma^*} = \mu_2^* \Psi_{2n}^*|_{\Gamma^*}.$$

Wird

$$\Psi^* = \begin{cases} \Psi_1^* & \text{in } \Omega_1^* \\ \Psi_2^* & \text{in } \Omega_2^* \end{cases} \quad \text{gesetzt, so bezeichne } H(\Omega^*)$$

den Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(\Psi^*, \widehat{\Psi}^*)_{H(\Omega^*)} = (\Psi_1^*, \widehat{\Psi}_1^*)_{\Omega_1^*}^{(1)} + (\Psi_2^*, \widehat{\Psi}_2^*)_{\Omega_2^*}^{(1)}.$$

Mit $\overset{\circ}{H}_n(\Omega^*)$ bezeichnen wir den Unterraum von $H(\Omega^*)$, dessen Elemente eine auf dem Rande von Ω^* verschwindende Normalkomponente haben, während für die Elemente von $\overset{\circ}{H}_r(\Omega^*)$ die Tangentialkomponente auf dem Rande von Ω^* verschwindet. Ist $Q_T^* = \Omega^* \times [0, T]$, $Q_T^{(i)*} = \Omega_i^* \times [0, T]$, $i = 1, 2$, dann seien $\overset{\circ}{H}_n(Q_T^*)$ bzw. $\overset{\circ}{H}_r(Q_T^*)$ die Teilräume von $L^2(Q_T^*)$, deren Elemente

$$\Psi = \begin{cases} \Psi_1 & \text{in } \Omega_1^* \\ \Psi_2 & \text{in } \Omega_2^* \end{cases} \quad \text{erste Ortsableitungen in } L^2(Q_T^{(i)*}), i = 1, 2$$

besitzen und für fast alle $t \in [0, T]$ zu $\overset{\circ}{H}_n(\Omega^*)$ bzw. $\overset{\circ}{H}_r(\Omega^*)$ gehören. Mit $M_n(Q_T^*)$ bzw. $M_r(Q_T^*)$ bezeichnen wir die Teilräume von $L^2(Q_T^*)$, deren Projektionen auf $\overset{\circ}{J}(Q_T^*)$ bzw. $J(Q_T^*)$ zu $\overset{\circ}{H}_n(Q_T^*)$ bzw. $\overset{\circ}{H}_r(Q_T^*)$ gehören. Diese Definitionen mögen sinngemäß auf Ω angewendet werden; dann haben wir es mit mehr als zwei Teilgebieten zu tun (vgl. [4]).

Es gilt der **Satz**: Das Rand-Anfangswertproblem (11) – (17) ist im Sinne der gegebenen Definition lösbar.

Zum **Beweis** ermitteln wir eine Folge von Näherungen; über Beschränktheitsaussagen kommen wir zu einer konvergenten Teilfolge. Von den Grenzfunktionen dieser Teilfolge ist zu zeigen, daß sie das Problem lösen. Zur Konstruktion von Näherungslösungen verwenden wir das Galerkin-Verfahren. Es sei $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ein Orthonormalsystem in $L^2(\Omega_1)$. Bezeichnet $M_n(\Omega)$ die Teilmenge von $L^2(\Omega)$ deren Projektion auf $\overset{\circ}{I}(\Omega)$ in $\overset{\circ}{H}_n(\Omega)$ liegt und $M_{\tau}(\Omega)$ die Teilmenge von $L^2(\Omega)$ deren Projektion auf $I(\Omega)$ in $\overset{\circ}{H}_{\tau}(\Omega)$ liegt, so seien $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ bzw. $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ Orthonormalsysteme in $M_{\tau}(\Omega)$ bzw. $M_n(\Omega)$; d.h. es gelte

$$\int_{\Omega} \varepsilon(x) \psi_k(x) \psi_l(x) dx = \delta_{lk}, \quad \int_{\Omega} \mu \omega_k \omega_l dx = \delta_{kl}.$$

Die Näherungen setzen wir in der Form

$$N_n(x, t) = \sum_{k=1}^n c_k(t) \varphi_k(x), \quad \tilde{\tilde{E}}_n(x, t) = \sum_{k=1}^n e_k(t) \psi_k(x), \quad \tilde{\tilde{H}}_n(x, t) = \sum_{k=1}^n h_k(t) \omega_k(x)$$

an, wobei die Funktionen

$$c_k(t) = (N_n, \varphi_k), \quad e_k(t) = (\varepsilon \tilde{\tilde{E}}_n, \psi_k), \quad h_k(t) = (\mu \tilde{\tilde{H}}_n, \omega_k), \quad k = 1, \dots, n$$

aus den Bedingungen

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial N_n}{\partial t} \varphi_k + D \operatorname{grad} N_n \operatorname{grad} \varphi_k + \frac{1}{\tau} N_n \varphi_k \right. \\ \left. + g(N_n) \left| \tilde{\tilde{E}}_n \right| \varphi_k - |J| \varphi_k \right) dx = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\varepsilon \frac{\partial \tilde{\tilde{E}}_n}{\partial t} \psi_k - \tilde{\tilde{H}}_n \operatorname{rot} \psi_k + (\sigma - g(N_n)) \tilde{\tilde{E}}_n \psi_k - J \psi_k \right. \\ \left. + \left(W + (\sigma - g(N_n)) \tilde{\tilde{E}} \right) \psi_k \right) dx = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\int_{\Omega} \left(\mu \frac{\partial \tilde{\tilde{H}}_n}{\partial t} \omega_k + \tilde{\tilde{E}}_n \operatorname{rot} \omega_k + V \omega_k \right) dx = 0 \quad (23)$$

mit

$$W = \varepsilon \frac{\partial \tilde{\tilde{E}}}{\partial t} - \operatorname{rot} \tilde{\tilde{H}}, \quad V = \mu \frac{\partial \tilde{\tilde{H}}}{\partial t} + \operatorname{rot} \tilde{\tilde{E}}$$

und

$$c_k(0) = (N_0, \varphi_k), \quad e_k(0) = (\varepsilon \tilde{\tilde{E}}_0, \psi_k), \quad h_k(0) = (\mu \tilde{\tilde{H}}_0, \omega_k) \quad (24)$$

$k = 1, \dots, n$ zu bestimmen sind.

Die Bedingungen (21), (22), (23) stellen ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen dar, das sich wie folgt schreiben läßt

$$\begin{aligned} \frac{dc_k(t)}{dt} = & -D \sum_{l=1}^n \alpha_{lk} c_l(t) \\ & - \frac{1}{\tau} c_k(t) - f_k(c_1(t), \dots, c_n(t); e_1(t), \dots, e_n(t)) + r_k(t), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{de_k(t)}{dt} = & \sum_{l=1}^n \beta_{lk} h_l(t) - F_k(c_1(t), \dots, c_n(t); e_1(t), \dots, e_n(t)) \\ & - G_k(c_1(t), \dots, c_n(t)) + s_k(t) - u_k(t), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\frac{dh_k(t)}{dt} = - \sum_{l=1}^n \gamma_{lk} e_l(t) - v_k(t), \quad k = 1, \dots, n. \quad (27)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \alpha_{lk} = & (\text{grad } \varphi_l, \text{grad } \varphi_k), f_k(c_1, \dots, c_n; e_1, \dots, e_n) = \left(g(N_n) \left| \tilde{\tilde{E}}_n \right|, \varphi_k \right), \\ r_k(t) = & (|J|, \varphi_k), \beta_{lk} = (\omega_l, \text{rot } \psi_k), F_k(c_1, \dots, c_n; e_1, \dots, e_n) \\ = & \left((\sigma - g(N_n)) \tilde{\tilde{E}}_n, \psi_k \right), \\ G_k(c_1, \dots, c_n) = & \left((\sigma - g(N_n)) \tilde{\tilde{E}}_n, \psi_k \right), s_k(t) = (J, \psi_k), u_k(t) = (W, \psi_k), \\ \gamma_{lk} = & (\psi_l, \text{rot } \omega_k), v_k(t) = (V, \omega_k). \end{aligned}$$

Das Differentialgleichungssystem (25), (26), (27) mit den Anfangswertbedingungen (24) ist für beliebiges $t \in [0, T]$ eindeutig lösbar. Um dies einzusehen, reicht es wegen der analytischen Eigenschaften der rechten Seite aus nachzuweisen, daß N_n , $\tilde{\tilde{E}}_n$ und $\tilde{\tilde{H}}_n$ endliche Normen haben. Für diesen Nachweis multiplizieren wir (21) mit $c_k(t)$, (22) mit $e_k(t)$ und (23) mit $h_k(t)$ und summieren über k jeweils von 1 bis n . Wir erhalten

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_n}{\partial t} N_n + D \text{grad } N_n \text{grad } N_n + \frac{1}{\tau} N_n^2 + g(N_n) \left| \tilde{\tilde{E}}_n \right| N_n - |J| N_n \right) dx = 0, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\varepsilon \frac{\partial \tilde{\tilde{E}}_n}{\partial t} \tilde{\tilde{E}}_n - \tilde{\tilde{H}}_n \text{rot } \tilde{\tilde{E}}_n + (\sigma - g(N_n)) \tilde{\tilde{E}}_n^2 - J \tilde{\tilde{E}}_n \right. \\ \left. + (W + (\sigma - g(N_n)) \tilde{\tilde{E}}) \tilde{\tilde{E}}_n \right) dx = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\int_{\Omega} \left(\mu \frac{\partial \tilde{\tilde{H}}_n}{\partial t} \tilde{\tilde{H}}_n + \tilde{\tilde{E}}_n \text{rot } \tilde{\tilde{H}}_n + V \tilde{\tilde{H}}_n \right) dx = 0. \quad (30)$$

Sei

$$\zeta_n^2(t) = \|N_n\|_{\Omega_1}^2 + \left\| \sqrt{\varepsilon} \tilde{\tilde{E}}_n \right\|_{\Omega}^2 + \left\| \sqrt{\mu} \tilde{\tilde{H}}_n \right\|_{\Omega}^2, R_n^2(t) = \|\operatorname{grad} N_n\|_{\Omega_1}^2,$$

dann ergibt die Addition von (28), (29) und (30)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \zeta_n^2(t) + D R_n^2(t) + Q_n(t) = 0. \quad (31)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} Q_n(t) = & \int_{\Omega_1} \left(\frac{1}{\tau} N_n^2 + g(N_n) \left| \tilde{\tilde{E}}_n \right| N_n - |J| N_n \right) dx \\ & + \int_{\Omega} \left(-\tilde{\tilde{H}}_n \operatorname{rot} \tilde{\tilde{E}}_n + (\sigma - g(N_n)) \tilde{\tilde{E}}_n^2 - J \tilde{\tilde{E}}_n \right. \\ & \quad \left. + (W - (\sigma - g(N_n)) \tilde{\tilde{E}}) \tilde{\tilde{E}}_n \right) dx \\ & + \int_{\Omega} \left(\tilde{\tilde{E}}_n \operatorname{rot} \tilde{\tilde{H}}_n + V \tilde{\tilde{H}}_n \right) dx. \end{aligned}$$

Da für beliebiges $u \in M_r(\Omega)$, $v \in M_n(\Omega)$ gilt

$$\int_{\Omega} v \operatorname{rot} u \, dx = \int_{\Omega} u \operatorname{rot} v \, dx$$

(vgl. [4], Seite 185), ist

$$\int_{\Omega} -\tilde{\tilde{H}}_n \operatorname{rot} \tilde{\tilde{E}}_n \, dx + \int_{\Omega} \tilde{\tilde{E}}_n \operatorname{rot} \tilde{\tilde{H}}_n \, dx = 0.$$

Es gelten folgende Abschätzungen

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_1} g(N_n) \left| \tilde{\tilde{E}}_n \right| N_n \, dx \right| & \leq \frac{1}{2} g_0 \left(\left\| \tilde{\tilde{E}}_n \right\|_{\Omega_1}^2 + \|N_n\|_{\Omega_1}^2 \right), \\ \left| \int_{\Omega_1} |J| N_n \, dx \right| & \leq \frac{1}{2} \left(\|J\|_{\Omega}^2 + \|N_n\|_{\Omega_1}^2 \right), \\ \left| \int_{\Omega_1} (\sigma - g(N_n)) \tilde{\tilde{E}}_n^2 \, dx \right| & \leq (g_0 - \sigma) \left\| \tilde{\tilde{E}}_n \right\|_{\Omega}^2, \\ \left| \int_{\Omega} J \tilde{\tilde{E}}_n \, dx \right| & \leq \frac{1}{2} \left(\|J\|_{\Omega}^2 + \left\| \tilde{\tilde{E}}_n \right\|_{\Omega}^2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega} W \tilde{\tilde{E}}_n dx \right| &\leq \frac{1}{2} \left(\|W\|_{\Omega}^2 + \|\tilde{\tilde{E}}_n\|_{\Omega}^2 \right), \\
\left| \int_{\Omega} (\sigma - g(N_n)) \tilde{\tilde{E}} \tilde{\tilde{E}}_n dx \right| &\leq \frac{1}{2} (g_0 - \sigma) \left(\|\tilde{\tilde{E}}\|_{\Omega}^2 + \|\tilde{\tilde{E}}_n\|_{\Omega}^2 \right), \\
\left| \int_{\Omega} V \tilde{\tilde{H}}_n dx \right| &\leq \frac{1}{2} \left(\|V\|_{\Omega}^2 + \|\tilde{\tilde{H}}_n\|_{\Omega}^2 \right).
\end{aligned}$$

Dann folgt aus (31)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \zeta_n^2 + DR_n^2 + \frac{1}{\tau} \|N_n\|_{\Omega_1}^2 &\leq \frac{1}{2} (g_0 + 1) \|N_n\|^2 \\
&+ \left(\frac{3}{2} (g_0 - \sigma) + \frac{1}{2} g_0 + 1 \right) \|\tilde{\tilde{E}}_n\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{\tilde{H}}_n\|_{\Omega}^2 + M^2
\end{aligned} \tag{32}$$

mit $M^2 = \|J\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} (\|W\|_{\Omega}^2 + \|V\|_{\Omega}^2)$.

Mit einer geeignet wählbaren Konstanten K ergibt sich aus (32)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \zeta_n^2 + DR_n^2 + \frac{1}{\tau} \|N_n\|_{\Omega_1}^2 \leq K \zeta_n^2 + M^2.$$

Nach Integration über t folgt daraus mit einer weiteren Konstanten C

$$\zeta_n^2(t) + D \int_0^t R_n^2 dt \leq C [\zeta_n^2(0) + M^2]. \tag{33}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\zeta_n^2(0) &= \|N_n(x, 0)\|_{\Omega_1}^2 + \left\| \sqrt{\varepsilon} \tilde{\tilde{E}}_n(x, 0) \right\|_{\Omega}^2 + \left\| \sqrt{\mu} \tilde{\tilde{H}}_n(x, 0) \right\|_{\Omega}^2 \\
&= \left\| \sum_{k=1}^n c_k(0) \varphi_k \right\|^2 + \left\| \sqrt{\varepsilon} \sum_{k=1}^n e_k(0) \psi_k \right\|^2 + \left\| \sqrt{\mu} \sum_{k=1}^n h_k(0) \omega_k \right\|^2 \\
&\leq \|N_0\|^2 + \left\| \sqrt{\varepsilon} \tilde{\tilde{E}}_0 \right\|^2 + \left\| \sqrt{\mu} \tilde{\tilde{H}}_0 \right\|^2
\end{aligned}$$

besitzt die linke Seite von (33) eine von n unabhängige Schranke; d.h. die Näherungslösungen N_n , $\tilde{\tilde{E}}_n$ und $\tilde{\tilde{H}}_n$ haben für beliebiges $t \in [0, T]$ endliche Normen.

Es ergibt sich, daß die Folge der Näherungslösungen eine Teilfolge besitzt, die in L^2 schwach konvergiert. Dies trifft auch für die Folge der ersten Ortsableitungen von $N_n(x, t)$ zu. Wegen der schwachen Vollständigkeit des Raumes existieren Grenzfunktionen, die wir mit $N(x, t)$, $\tilde{\tilde{E}}(x, t)$ und $\tilde{\tilde{H}}(x, t)$ bezeichnen. Es bleibt zu zeigen, daß sie eine Lösung unseres Rand-Anfangswertproblems liefern.

$p_k(t)$, $q_k(t)$, $r_k(t)$ seien beliebige Funktionen aus $W_2^1(0, T)$, die den Bedingungen $p_k(T) = q_k(T) = r_k(T) = 0$ genügen. Wenn wir (21) mit $p_k(t)$, (22) mit $q_k(t)$ und

(23) mit $r_k(t)$ multiplizieren, über k jeweils von 1 bis n summieren und anschließend von 0 bis T über t integrieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega_1} \left(-N_n \frac{\partial \phi^{n'}}{\partial t} + D \operatorname{grad} N_n \operatorname{grad} \phi^{n'} + \frac{1}{\tau} N_n \phi^{n'} + g(N_n) \left| \tilde{\tilde{E}}_n \right| \phi^{n'} - |J| \phi^{n'} \right) dx dt \\ - \int_{\Omega_1} N_n(x, 0) \phi^{n'}(x, 0) dx = 0, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \left(-\varepsilon \tilde{\tilde{E}}_n \frac{\partial \Psi^{n'}}{\partial t} - \tilde{\tilde{H}}_n \operatorname{rot} \Psi^{n'} + (\sigma - g(N_n)) \tilde{\tilde{E}}_n \Psi^{n'} - J \Psi^{n'} \right. \\ \left. + \left(W + (\sigma - g(N_n)) \tilde{\tilde{E}} \right) \Psi^{n'} \right) dx dt - \int_{\Omega} \varepsilon \tilde{\tilde{E}}_n(x, 0) \Psi^{n'}(x, 0) dx = 0, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \left(-\mu \tilde{\tilde{H}}_n \frac{\partial \Upsilon^{n'}}{\partial t} + \tilde{\tilde{E}}_n \operatorname{rot} \Upsilon^{n'} + V \Upsilon^{n'} \right) dx dt \\ - \int_{\Omega} \mu \tilde{\tilde{H}}_n(x, 0) \Upsilon^{n'}(x, 0) dx = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

mit

$$\phi^{n'} = \sum_{k=1}^{n'} p_k(t) \varphi_k(x), \quad \Psi^{n'} = \sum_{k=1}^n q_k(t) \psi_k(x), \quad \Upsilon^{n'} = \sum_{k=1}^n r_k(t) \omega_k(x). \quad (37)$$

In (34), (35), (36) gehen wir bei festgehaltenem $\phi^{n'}, \Psi^{n'}, \Upsilon^{n'}$ in den Näherungslösungen $N_n, \tilde{\tilde{E}}_n, \tilde{\tilde{H}}_n$ zur Grenze $N, \tilde{\tilde{E}}, \tilde{\tilde{H}}$ über, indem wir n die oben erwähnte Teilfolge durchlaufen lassen; dieser Grenzübergang läßt sich bei allen Raum-Zeit-Integralen unter dem Integralzeichen vollziehen. In den reinen Raumintegralen kann man ebenfalls unter dem Integral zur Grenze übergehen, weil $N_n(x, 0), \tilde{\tilde{E}}_n(x, 0), \tilde{\tilde{H}}_n(x, 0)$ für $n \rightarrow \infty$ stark gegen die Anfangswerte $N_0(x), \tilde{\tilde{E}}_0(x), \tilde{\tilde{H}}_0(x)$ konvergieren. Die Menge der Funktionen $\phi^{n'}, \Psi^{n'}, \Upsilon^{n'}$, die in der Form (37) darstellbar sind, liegt dicht in der Menge der Funktionen die bei $t = T$ verschwinden und zu $W_2^{1,1}(Q_T^{(1)}), W_2^{0,1}(Q_T) \cap M_\tau(Q_T), W_2^{0,1}(Q_T) \cap M_n(Q_T)$ gehören.

Daher darf in (34), (35), (36) an Stelle von $\phi^{n'}, \Psi^{n'}, \Upsilon^{n'}$ ein beliebiges Element ϕ, Ψ, Υ aus den genannten Mengen stehen. Um zu zeigen, daß die Grenzfunktionen $N, \tilde{\tilde{E}}, \tilde{\tilde{H}}$ unter der Voraussetzung $N_0 \in W_2^2(\Omega_1), \tilde{\tilde{E}}_0 \in M_\tau(\Omega), \tilde{\tilde{H}}_0 \in M_n(\Omega)$ den Beziehungen (18), (19), (20) genügen, beweisen wir zunächst, daß $N, \tilde{\tilde{E}}, \tilde{\tilde{H}}$ quadratisch integrierbare Zeitableitungen haben. Dazu wählen wir in den Fundamentalsystemen $\{\varphi_k\}, \{\psi_k\}, \{\omega_k\}$ die ersten Funktionen in der Form

$$\varphi_1 = \frac{N_0}{\|N_0\|_{\Omega_1}}, \quad \psi_1 = \frac{\tilde{\tilde{E}}_0}{\|\sqrt{\varepsilon} \tilde{\tilde{E}}_0\|_{\Omega}}, \quad \omega_1 = \frac{\tilde{\tilde{H}}_0}{\|\sqrt{\mu} \tilde{\tilde{H}}_0\|_{\Omega}}.$$

Die Anfangsbedingungen (24) lauten dann

$$c_1(0) = \|N_0\|, \quad e_1(0) = \left\| \sqrt{\varepsilon} \tilde{\tilde{E}}_0 \right\|, \quad h_1(0) = \left\| \sqrt{\mu} \tilde{\tilde{H}}_0 \right\|$$

$$c_k(0) = 0, \quad e_k(0) = 0, \quad h_k(0) = 0, \quad k = 2, 3, \dots$$

und es gilt

$$N_n(x, 0) = N_0(x), \quad \tilde{\tilde{E}}_n(x, 0) = \tilde{\tilde{E}}_0(x), \quad \tilde{\tilde{H}}_n(x, 0) = \tilde{\tilde{H}}_0(x).$$

(21), (22), (23) lassen sich für $t = 0$ in der Form

$$\int_{\Omega_1} \frac{\partial N_n}{\partial t} \varphi_k dx \Big|_{t=0} = \int_{\Omega_1} \left[D \Delta N_0 - \frac{1}{\tau} N_0 - g(N_0) |\tilde{\tilde{E}}_0| + |J| \right] \varphi_k dx, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varepsilon \frac{\partial \tilde{\tilde{E}}_n}{\partial t} \psi_k dx \Big|_{t=0} &= \int_{\Omega} \left[\operatorname{rot} \tilde{\tilde{H}}_0 - (\sigma - g(N_0)) \tilde{\tilde{E}}_0 + J \right. \\ &\quad \left. - \left(W_0 + (\sigma - g(N_0)) \tilde{\tilde{E}}_0 \right) \right] \psi_k dx, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\int_{\Omega} \mu \frac{\partial \tilde{\tilde{H}}_n}{\partial t} \omega_k dx \Big|_{t=0} = \int_{\Omega} \left[-\operatorname{rot} \tilde{\tilde{E}}_0 - V_0 \right] \omega_k dx \quad (40)$$

mit

$$V_0 = \mu \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \tilde{E} \Big|_{t=0}, \quad W_0 = \varepsilon \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} - \operatorname{rot} \tilde{H} \Big|_{t=0}$$

schreiben. Multipliziert man (38) mit $\frac{dc_k(t)}{dt} \Big|_{t=0}$ und summiert über k von 1 bis n , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \frac{\partial N_n}{\partial t} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{dc_k}{dt} \varphi_k dx \Big|_{t=0} &= \left\| \frac{\partial N_n}{\partial t} \right\|_{\Omega_1}^2 \Big|_{t=0} = \\ &= \int_{\Omega_1} \left[D \Delta N_0 - \frac{1}{\tau} N_0 - g(N_0) |\tilde{\tilde{E}}_0| + |J| \right] \frac{\partial N_n}{\partial t} \Big|_{t=0} dx \end{aligned}$$

und daraus

$$\|N_{nt}(x, 0)\|_{\Omega_1} \leq C \left(\|N_0\|_{W_2^2(\Omega_1)} + \|\tilde{\tilde{E}}_0\|_{\Omega} + \|J\|_{\Omega} \right). \quad (41)$$

Verfährt man entsprechend bei (39) und (40), so ergibt sich

$$\left\| \sqrt{\varepsilon} \tilde{\tilde{E}}_{nt}(x, 0) \right\|_{\Omega} \leq C \left(\|\tilde{\tilde{H}}_0\|_{M_n(\Omega)} + \|\tilde{\tilde{E}}_0\|_{\Omega} + \|J\|_{\Omega} + \|W_0\|_{\Omega} + \|\tilde{\tilde{E}}_0\|_{\Omega} \right), \quad (42)$$

$$\left\| \sqrt{\mu} \widetilde{H}_{nt}(x, 0) \right\|_{\Omega} \leq C \left(\left\| \widetilde{E}_0 \right\|_{M_r(\Omega)} + \|V_0\|_{\Omega} \right).$$

Also besitzen $N_{nt}(x, 0)$, $\widetilde{E}_{nt}(x, 0)$ und $\widetilde{H}_{nt}(x, 0)$ von n unabhängig Schranken. Daraus folgt, daß auch

$$\left\| \frac{\partial N_n}{\partial t} \right\|_{Q_T^{(1)}}^2 + \left\| \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \widetilde{E}_n}{\partial t} \right\|_{Q_T}^2 + \left\| \sqrt{\mu} \frac{\partial \widetilde{H}_n}{\partial t} \right\|_{Q_T}$$

unabhängig von n beschränkt sind (vgl. [4], Lemma 2). Man darf daher in (21), (22), (23) die Näherungsausdrücke N_n , \widetilde{E}_n , \widetilde{H}_n durch die Grenzfunktionen N , \widetilde{E} , \widetilde{H} ersetzen. Damit ist gezeigt, daß diese im Sinne unserer Definition eine Lösung des Rand-Anfangswertproblems liefern. Über weitergehende Differenzierbarkeitseigenschaften der Lösung gilt der folgende Satz. Wenn die Ränder in Ω zweimal stetig differenzierbar sind, die Anfangswertverteilungen den Bedingungen $N_0 \in W_2^2(\Omega_1)$, $\widetilde{E}_0 \in M_r(\Omega)$, $\widetilde{H}_0 \in M_n(\Omega)$ genügen, $J \in W_2^{0,1}(\Omega)$ gilt und \widetilde{E} , \widetilde{H} entsprechende Eigenschaften haben, so können wir zeigen, daß N über $Q_T^{(1)}$ quadratisch integrierbare zweite Ortsableitungen besitzt und $\widetilde{E} \in M_r(Q_T)$, $\widetilde{H} \in M_n(Q_T)$ sind. Es gilt dann eine a priori Abschätzung der Form

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|N\|_{W_2^2(\Omega_1)}^2 dt + \left\| \widetilde{E} \right\|_{M_r(Q_T)}^2 + \left\| \widetilde{H} \right\|_{M_n(Q_T)}^2 \leq \\ & C_0 \left(\|N_0\|_{W_2^2(\Omega_1)}^2 + \left\| \widetilde{E}_0 \right\|_{M_r(\Omega)}^2 + \left\| \widetilde{H}_0 \right\|_{M_n(\Omega)}^2 + \|V_0\|_{\Omega}^2 + \|W_0\|_{\Omega}^2 + \|J\|_{2, Q_T}^{(0,1)^2} \right). \end{aligned} \quad (43)$$

Zum Beweis dieser Behauptungen setzen wir in (19) $\Psi_1(x, t) = f(t)\psi_1(x)$, $f \in L^2(0, T)$, dann folgt für fast alle $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ \varepsilon \frac{\partial \widetilde{E}}{\partial t} + (\sigma - g(N)) \widetilde{E} - J + W + (\sigma - g(N)) \widetilde{E} \right\} \psi_1 dx \\ & = \int_{\Omega} \widetilde{H} \operatorname{rot} \psi_1 dx. \end{aligned} \quad (44)$$

Der Ausdruck w unter dem linken Integral in der geschweiften Klammer ist für fast alle t über Ω quadratisch summierbar, für beliebiges $\psi_1 \in \mathring{G}(\Omega)$ folgt daher aus (44), daß für alle $t \in [0, T]$ gilt $w \in J(\Omega)$. Folglich läßt sich dieses w in der Form

$$w = \operatorname{rot} H_1, \quad H_1 \in \mathring{H}_n(\Omega)$$

darstellen und es gilt $H_1 \in H(Q_T)$ (vgl. [4], S. 201). Wegen

$$\int_{\Omega} H_1 \operatorname{rot} \psi_1 dx = \int_{\Omega} \widetilde{H} \operatorname{rot} \psi_1 dx$$

Ergibt sich dann $\widetilde{\widetilde{H}} = H_1 + \text{grad } \varphi, \varphi \in W_2^1(\Omega)$ für fast alle t . Ähnlich ergibt sich $\widetilde{\widetilde{E}} = E_1 + \text{grad } \tilde{\varphi}, E_1 \in \dot{H}_\tau(\Omega), \tilde{\varphi} \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ für fast alle t . Die Aussage über N erhält man aus den entsprechenden Sätzen über elliptische Differentialoperatoren (vgl. z.B. [6], S. 220 f) und es folgt (43).

3. EINZIGKEITSSATZ

Es gilt der **Satz**: Unter den gleichen Voraussetzungen wie im letzten Satz hat das Rand-Anfangswertproblem (11) – (17) im Sinne der Definition höchstens eine Lösung.

Beweis. Für zwei Lösungen $N_1, \widetilde{\widetilde{E}}_1, \widetilde{\widetilde{H}}_1$ und $N_2, \widetilde{\widetilde{E}}_2, \widetilde{\widetilde{H}}_2$ ist ihre Differenz $N' = N_1 - N_2 \in W_2^{1,1}(Q_T^{(1)}), \widetilde{\widetilde{E}}' = \widetilde{\widetilde{E}}_1 - \widetilde{\widetilde{E}}_2 \in W_2^{0,1}(Q_T), \widetilde{\widetilde{H}}' = \widetilde{\widetilde{H}}_1 - \widetilde{\widetilde{H}}_2 \in W_2^{0,1}(Q_T)$ und genügt den Integraloperatoren (11), (12), (13) für $J = 0, V = 0, W = 0$; die Anfangswerte $N'|_{t=0}, \widetilde{\widetilde{E}}'|_{t=0}$ und $\widetilde{\widetilde{H}}'|_{t=0}$ verschwinden.

Nun setzen wir für ϕ, Ψ_1, Ψ_2 in (18), (19), (20)

$$\phi = \begin{cases} N' & \text{für } t \in [0, h] \\ 0 & \text{für } t \in [h, T] \end{cases}, \quad \Psi_1 = \begin{cases} \widetilde{\widetilde{E}}' & \text{für } t \in [0, h] \\ 0 & \text{für } t \in [h, T] \end{cases}, \quad \Psi_2 = \begin{cases} \widetilde{\widetilde{H}}' & \text{für } t \in [0, h] \\ 0 & \text{für } t \in [h, T] \end{cases}$$

und haben dann

$$\begin{aligned} & \int_0^h \int_{\Omega_1} \left[\frac{\partial N'}{\partial t} N' + D \text{grad } N' \text{grad } N' + \frac{1}{\tau} N'^2 + \right. \\ & \left. (g(N_1) - g(N_2)) \left| \widetilde{\widetilde{E}}_1 \right| N' + g(N_2) \left(\left| \widetilde{\widetilde{E}}_1 \right| - \left| \widetilde{\widetilde{E}}_2 \right| \right) N' \right] dx dt = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^h \int_{\Omega} \left[\varepsilon \frac{\partial \widetilde{\widetilde{E}}'}{\partial t} \widetilde{\widetilde{E}}' - \widetilde{\widetilde{H}}' \text{rot } \widetilde{\widetilde{E}}' + \left\{ (\sigma - g(N_1)) \widetilde{\widetilde{E}}' - (g(N_1) - g(N_2)) \widetilde{\widetilde{E}}_2 \right\} \widetilde{\widetilde{E}}' \right. \\ & \left. - (g(N_1) - g(N_2)) \widetilde{\widetilde{E}} \widetilde{\widetilde{E}}' \right] dx dt = 0, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\int_0^h \int_{\Omega} \left[\mu \frac{\partial \widetilde{\widetilde{H}}'}{\partial t} \widetilde{\widetilde{H}}' + \widetilde{\widetilde{E}}' \text{rot } \widetilde{\widetilde{H}}' \right] dx dt = 0. \quad (47)$$

Wir addieren (45), (46), (47) und berücksichtigen, daß sich die Glieder $-\widetilde{\widetilde{H}}' \text{rot } \widetilde{\widetilde{E}}'$

und $\tilde{\tilde{E}}'$ rot $\tilde{\tilde{H}}'$ gegenseitig aufheben. Das liefert

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|N'(x, h)\|_{\Omega_1}^2 + \frac{1}{2} \left\| \sqrt{\varepsilon} \tilde{\tilde{E}}'(x, h) \right\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \left\| \sqrt{\mu} \tilde{\tilde{H}}'(x, h) \right\|_{\Omega}^2 + D \int_0^h \|\text{grad } N'\|_{\Omega}^2 dt \\ V = & - \int_0^h \int_{\Omega_1} \left\{ \frac{1}{\tau} N'^2 + (g(N_1) - g(N_2)) \left| \tilde{\tilde{E}}_1 \right| N' + g(N_2) \left(\left| \tilde{\tilde{E}}_1 \right| - \left| \tilde{\tilde{E}}_2 \right| \right) N' \right\} dx dt \\ & - \int_0^h \left\{ (\sigma - g(N_1)) \tilde{\tilde{E}}'^2 - (g(N_1) - g(N_2)) \tilde{\tilde{E}}_2 \tilde{\tilde{E}}' - (g(N_1) - g(N_2)) \tilde{\tilde{E}} \tilde{\tilde{E}}' \right\} dx dt. \end{aligned} \quad (48)$$

Die mit $S(h)$ bezeichnete rechte Seite von (48) läßt sich wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned} |S(h)| \leq & \int_0^h \left\{ \frac{1}{\tau} \|N'\|_{\Omega_1}^2 + 2g_0 |\Omega| \left\| \tilde{\tilde{E}}_1 \right\|_{\Omega} \|N'\|_{\Omega_1}^2 + \frac{1}{2} g_0 \left(\left\| \tilde{\tilde{E}}' \right\|_{\Omega}^2 + \|N'\|_{\Omega}^2 \right) \right. \\ & \left. + (g_0 - \sigma) \left\| \tilde{\tilde{E}}' \right\|_{\Omega}^2 + 2g_0 |\Omega| \left(\left\| \tilde{\tilde{E}}_2 \right\|_{\Omega} + \left\| \tilde{\tilde{E}} \right\|_{\Omega} \right) \left\| \tilde{\tilde{E}}' \right\|_{\Omega}^2 \right\} dt. \end{aligned}$$

Wenn der für $\tilde{\tilde{E}}_1$ und $\tilde{\tilde{E}}_2$ gültigen a priori Abschätzungen folgt damit aus (48) ein Ungleichung der Form

$$\begin{aligned} & \|N'(x, h)\|_{\Omega_1}^2 + \left\| \sqrt{\varepsilon} \tilde{\tilde{E}}'(x, h) \right\|_{\Omega}^2 + \left\| \sqrt{\mu} \tilde{\tilde{H}}'(x, h) \right\|_{\Omega}^2 \\ \leq & C \int_0^h \left\{ \|N'(x, t)\|_{\Omega_1}^2 + \left\| \sqrt{\varepsilon} \tilde{\tilde{E}}'(x, t) \right\|_{\Omega}^2 + \left\| \sqrt{\mu} \tilde{\tilde{H}}'(x, t) \right\|_{\Omega}^2 \right\} dt, \end{aligned} \quad (49)$$

die für beliebiges $h \in [0, T]$ richtig ist. Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $N', \tilde{\tilde{E}}', \tilde{\tilde{H}}'$ für $t = 0$ verschwinden, ergibt sich aus (49) die behauptete Einzigkeitsaussage.

LITERATUR

1. V.L. Bruč-Bruevič and S.G. Kalašnikov, *Halbleiterphysik*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1982.
2. Kenichi Iga, Fumio Kuyama, and Susumu Kinoshita, *Surface emitting semiconductor lasers*, IEEE Journal of Quantum Electronics (1988), no. 24, 1845 – 1855.
3. О.А. Лацыженская и Н.Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Москва, 1964.
4. Л. Ступялис, *Нестационарная задача магнитной гидродинамики*, Зап. научных семинаров ЛОМИ (1975), no. 52, 175 – 217.
5. C.B. Su, *An analytical solution of kinks and nonlinearities driven by near-field displacement instabilities in stripe geometry diode lasers*, J. Appl. Phys. 52 (1981), no. 4, 2665 – 2673.
6. Yi-Guang Zhao, *Simulations studies of frequency locking, quasi-periodicity, subharmonic bifurcation, and chaos in modulated semiconductors*, IEEE Journal of Quantum Electronics 28 (1992), no. 10, 2009 – 2015.

Veröffentlichungen des Instituts für Angewandte Analysis und Stochastik

Preprints 1992

1. D.A. Dawson, J. Gärtner: Multilevel large deviations.
2. H. Gajewski: On uniqueness of solutions to the drift-diffusion-model of semiconductor devices.
3. J. Fuhrmann: On the convergence of algebraically defined multigrid methods.
4. A. Bovier, J.-M. Ghez: Spectral properties of one-dimensional Schrödinger operators with potentials generated by substitutions.
5. D.A. Dawson, K. Fleischmann: A super-Brownian motion with a single point catalyst.
6. A. Bovier, V. Gayrard: The thermodynamics of the Curie-Weiss model with random couplings.
7. W. Dahmen, S. Pröbldorf, R. Schneider: Wavelet approximation methods for pseudodifferential equations I: stability and convergence.
8. A. Rathsfeld: Piecewise polynomial collocation for the double layer potential equation over polyhedral boundaries. Part I: The wedge, Part II: The cube.
9. G. Schmidt: Boundary element discretization of Poincaré-Steklov operators.
10. K. Fleischmann, I. Kaj: Large deviation probability for some rescaled superprocesses.
11. P. Mathé: Random approximation of finite sums.
12. C.J. van Duijn, P. Knabner: Flow and reactive transport in porous media induced by well injection: similarity solution.
13. G.B. Di Masi, E. Platen, W.J. Runggaldier: Hedging of options under discrete observation on assets with stochastic volatility.
14. J. Schmeling, R. Siegmund-Schultze: The singularity spectrum of self-affine fractals with a Bernoulli measure.
15. A. Koshelev: About some coercive inequalities for elementary elliptic and parabolic operators.
16. P.E. Kloeden, E. Platen, H. Schurz: Higher order approximate Markov chain filters.

17. H.M. Dietz, Y. Kutoyants: A minimum-distance estimator for diffusion processes with ergodic properties.
18. I. Schmelzer: Quantization and measurability in gauge theory and gravity.
19. A. Bovier, V. Gayrard: Rigorous results on the thermodynamics of the dilute Hopfield model.
20. K. Gröger: Free energy estimates and asymptotic behaviour of reaction-diffusion processes.
21. E. Platen (ed.): Proceedings of the 1st workshop on stochastic numerics.
22. S. Prößdorf (ed.): International Symposium "Operator Equations and Numerical Analysis" September 28 – October 2, 1992 Gosen (nearby Berlin).
23. K. Fleischmann, A. Greven: Diffusive clustering in an infinite system of hierarchically interacting diffusions.
24. P. Knabner, I. Kögel-Knabner, K.U. Totsche: The modeling of reactive solute transport with sorption to mobile and immobile sorbents.
25. S. Seifarth: The discrete spectrum of the Dirac operators on certain symmetric spaces.
26. J. Schmeling: Hölder continuity of the holonomy maps for hyperbolic basic sets II.
27. P. Mathé: On optimal random nets.
28. W. Wagner: Stochastic systems of particles with weights and approximation of the Boltzmann equation. The Markov process in the spatially homogeneous case.
29. A. Glitzky, K. Gröger, R. Hünlich: Existence and uniqueness results for equations modelling transport of dopants in semiconductors.
30. J. Elschner: The h - p -version of spline approximation methods for Mellin convolution equations.
31. R. Schlundt: Iterative Verfahren für lineare Gleichungssysteme mit schwach besetzten Koeffizientenmatrizen.
32. G. Hebermehl: Zur direkten Lösung linearer Gleichungssysteme auf Shared und Distributed Memory Systemen.
33. G.N. Milstein, E. Platen, H. Schurz: Balanced implicit methods for stiff stochastic systems: An introduction and numerical experiments.
34. M.H. Neumann: Pointwise confidence intervals in nonparametric regression with heteroscedastic error structure.

35. M. Nussbaum: Asymptotic equivalence of density estimation and white noise.

Preprints 1993

36. B. Kleemann, A. Rathsfeld: Nyström's method and iterative solvers for the solution of the double layer potential equation over polyhedral boundaries.
37. W. Dahmen, S. Prössdorf, R. Schneider: Wavelet approximation methods for pseudodifferential equations II: matrix compression and fast solution.
38. N. Hofmann, E. Platen, M. Schweizer: Option pricing under incompleteness and stochastic volatility.
39. N. Hofmann: Stability of numerical schemes for stochastic differential equations with multiplicative noise.
40. E. Platen, R. Rebolledo: On bond price dynamics.
41. E. Platen: An approach to bond pricing.
42. E. Platen, R. Rebolledo: Pricing via anticipative stochastic calculus.
43. P.E. Kloeden, E. Platen: Numerical methods for stochastic differential equations.
44. L. Brehmer, A. Liemant, I. Müller: Ladungstransport und Oberflächenpotentialkinetik in ungeordneten dünnen Schichten.
45. A. Bovier, C. Külske: A rigorous renormalization group method for interfaces in random media.
46. G. Bruckner: On the regularization of the ill-posed logarithmic kernel integral equation of the first kind.
47. H. Schurz: Asymptotical mean stability of numerical solutions with multiplicative noise.
48. J.W. Barrett, P. Knabner: Finite element approximation of transport of reactive solutes in porous media. Part I: Error estimates for non-equilibrium adsorption processes.
49. M. Pulvirenti, W. Wagner, M.B. Zavelani Rossi: Convergence of particle schemes for the Boltzmann equation.
50. J. Schmeling: Most β shifts have bad ergodic properties.
51. J. Schmeling: Self normal numbers.

52. D.A. Dawson, K. Fleischmann: Super-Brownian motions in higher dimensions with absolutely continuous measure states.
53. A. Koshelev: Regularity of solutions for some problems of mathematical physics.
54. J. Elschner, I.G. Graham: An optimal order collocation method for first kind boundary integral equations on polygons.
55. R. Schlundt: Iterative Verfahren für lineare Gleichungssysteme auf Distributed Memory Systemen.
56. D.A. Dawson, K. Fleischmann, Y. Li, C. Müller: Singularity of super-Brownian local time at a point catalyst.
57. N. Hofmann, E. Platen: Stability of weak numerical schemes for stochastic differential equations.
58. H.G. Bothe: The Hausdorff dimension of certain attractors.
59. I.P. Ivanova, G.A. Kamenskij: On the smoothness of the solution to a boundary value problem for a differential-difference equation.
60. A. Bovier, V. Gayraud: Rigorous results on the Hopfield model of neural networks.
61. M.H. Neumann: Automatic bandwidth choice and confidence intervals in nonparametric regression.
62. C.J. van Duijn, P. Knabner: Travelling wave behaviour of crystal dissolution in porous media flow.